

Sudoku und Tabellenkalkulation

Ein Semesterprojekt mit Excel

von Peter Gallin

Im zweiten Semester des zehnten Schuljahrs steht im mathematisch-naturwissenschaftlichen Profil der Kantonsschule *Zürcher Oberland* in Wetzikon eine Semesterstunde für Informatik zur Verfügung, die in Halbklassen erteilt wird. Zu diesem Zeitpunkt haben die Schülerinnen und Schüler schon einige Erfahrung im Programmieren (mit JAVA) und in der Anwendung von Standard-Software (mit Office-Programmen, Mathematica) erworben, sodass die individuellen Meinungen und Selbsteinschätzungen bezüglich Informatik weitgehend gefestigt sind.

Oberstes Ziel bei der Auswahl eines Themas für den anstehenden Informatikunterricht war also, ein individuelles Arbeiten zu ermöglichen, bei dem die informatische Bildung erweitert und vertieft werden kann. Meine Wahl fiel rasch auf das Thema *Sudoku*, weil diese Rätsel von fast allen Schülerinnen und Schülern täglich in den Gratiszeitungen bearbeitet werden. Ich beschloss, mit den Schülern in Excel eine Umgebung zu schaffen, in der jedes Sudoku-Rätsel automatisch gelöst werden kann.

Insgesamt lässt sich feststellen:

- ▷ Alle Schülerinnen und Schüler der Klasse haben es geschafft, einen Sudoku-Bereich (d.h. einen quadratischen Excel-Bereich von 9 mal 9 Feldern) herzustellen, in den man von Hand die vom Rätsel vorgegebenen Zahlen und anschließend eigene Zahlen einsetzen kann, die automatisch auf Stimmigkeit (d.h. Beachtung der Sudoku-Regeln, s.u.) geprüft werden.
- ▷ Außerdem schafften es alle, zu den gegebenen Zahlen Vorschläge für weiter einsetzbare Zahlen berechnen und anzeigen zu lassen.
- ▷ Schließlich konnten alle auch mit einem kurzen Programm in Visual-BASIC die berechneten Zahlen automatisch einsetzen lassen, so dass die einfacheren Rätsel vollautomatisch lösbar wurden.

Die großen Unterschiede in der Leistungsfähigkeit der einzelnen Schüler traten erst bei den Finessen auf, mit denen dann auch die schwierigsten Rätsel und solche mit mehreren Lösungen behandelt werden können. Damit hat sich gezeigt, dass die günstige Kombination von Thema und Programmierumgebung dafür geeignet war, jedem Schüler und jeder Schülerin das Umfeld zu schaffen, in dem die individuellen Fähigkeiten optimal zur Wirkung kommen konnten.

Der Projektertrag

Bevor auf die zugrundeliegenden mathematischen Strukturen eingegangen wird, sei der Ertrag des Projekts vorweggenommen. Im Gegensatz zur oft gemachten Erfahrung, dass nur die Schnellsten und Besten zum Ziel kommen und die Schwächeren sich an die anderen „anhängen“, hat sich hier gezeigt, dass alle Schülerinnen und Schüler tatsächlich ihre eigenen Excel-Blätter geschaffen haben und dabei in der Automatisierung der Lösungssuche natürlich unterschiedlich weit gekommen sind. Der große Vorteil von Excel war, dass die Gestaltung der Oberfläche (das Eingabefeld, die Kontrollfelder, die Rechenfelder usw.) keine Programmierkenntnisse erfordert und entsprechend individuell ausgearbeitet werden konnte.

Einführung in das Spiel und erste Begriffe

Viele Schülerinnen und Schüler kannten sich bestens in den intuitiven Lösungstechniken für Sudoku-Rätsel aus. Da zwei grundsätzlich verschiedene Strategien zur Anwendung kamen, mussten wir geeignete Begriffe bilden, um besser miteinander kommunizieren zu können. Wir führen diese Begriffe hier am Beispiel von Bild 1 – auf der nächsten Seite – ein (es ist direkt aus einer Excel-Tabelle herauskopiert worden).

Wir nennen im Folgenden den für das Rätsel reservierten Bereich in der Excel-Tabelle den *Sudoku-Bereich*. Die drei Begriffe *Zeile*, *Spalte* und *Kasten* (Block) fassen wir unter dem Oberbegriff *Einheit* zusammen. Untersuchen wir nun zuerst, wie man vorgehen kann, um aufgrund der gegebenen Anfangsbelegung erste Zahlen (besser: Ziffern, da es auf den Zahlenwert nicht ankommt) einzutragen. Dazu gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Strategien.

Aktive Strategie:

Nimm eine Zahl und suche das Feld

Die erste, wohl am meisten verbreitete Strategie arbeitet aktiv und kommt weitgehend ohne Notizen und Radieren aus. Sie nimmt sich eine bestimmte Zahl (eigentlich: Ziffer) vor und fragt, wo sie noch eingesetzt werden kann. Bei einfacheren Rätseln führt dieses Vorgehen rasch zum Ziel. Nehmen wir uns beispielsweise die 2 vor, weil sie schon einige Male unter den gegebenen Ziffern des Rätsels von Bild 1 vorkommt. Im ersten und zweiten Kasten (wir zählen grundsätzlich oben links beginnend zeilenweise von links nach rechts) ist sie vorhanden, nicht aber im dritten Kasten. Dort muss sie aber unbedingt Unterschlupf finden, da ja alle Ziffern von 1 bis 9 auch im dritten Kasten auftreten müssen. Nun ist aber die 2 in der zweiten und dritten Zeile bereits gesetzt, also kann sie im dritten Kasten nicht in der zweiten oder dritten Zeile auftreten. Und da nur noch ein Feld in der ersten Zeile des dritten Kastens frei ist, muss die 2 also zwingend in das Feld ganz oben rechts eingetragen werden. Wir nennen die 2 in diesem Fall eine *einsame Zahl* („Sudoku“ ist – nach Delahaye, 2006, S. 100 – der japanische Ausdruck für „einsame Zahl“).

Bild 1: Ein Sudoku-Rätsel.

			8			7	1	
2			9		6	5		
4	5		2					
	2					4	8	1
			6	4	1			
1	7	4					5	
					9		7	3
		5	1		2			6
	6	2			7			

Sudoku-Regeln

Ein *Sudoku-Rätsel* besteht aus einem Quadrat mit 9×9 Feldern, das in 9 Unterquadrate („Blöcke“ oder „Kästen“) mit je 3×3 Feldern unterteilt ist. In einige der 81 Felder sind zu Beginn Ziffern zwischen 1 und 9 eingetragen. Ziel des Spiels ist es, auch die restlichen Felder mit Ziffern zwischen 1 und 9 so zu belegen, dass in keiner Zeile, keiner Spalte und in keinem Block eine Ziffer mehrfach vorkommt. Dies ist bei den meisten in Zeitschriften und Büchern publizierten Rätseln eindeutig möglich. Allerdings sind auch Anfangsbelegungen denkbar, die keine oder mehrere Lösungen zulassen.

Eine weitere einsame Zahl finden wir im zweiten Kasten. Wenn wir uns vornehmen, dort die 4 zu setzen, stellen wir fest, dass sie weder in der dritten Zeile noch in der fünften Spalte gesetzt werden kann und daher zwingend oben rechts im zweiten Kasten eingetragen werden muss. In dieser Weise fortfahrend finden wir im vorliegenden einfachen Rätsel 13 weitere einsame Zahlen, die nur aufgrund der bereits gegebenen Zahlen gesetzt werden können. Dabei ist es natürlich so, dass durch das eigene Setzen von Ziffern wiederum neue einsame Zahlen entstehen. Das hier gezeigte Rätsel ist sogar so leicht, dass es mit dieser Strategie vollständig gelöst werden kann.

Passive Strategie:

Nimm ein Feld und suche die Zahl

Die zweite Strategie ist passiv und kommt normalerweise erst dann zum Zug, wenn keine einsamen Zahlen mehr vorhanden sind. Dabei notiert man für jedes Feld alle Kandidaten, welche in dieses Feld noch einsetzbar sind. Die Kandidaten eines Felds ergeben sich durch Abstreichen jener Ziffern von 1 bis 9, die in der Zeile, der Spalte oder dem Kasten bereits vorkommen, die das betrachtete Feld enthalten. Daher muss man für den schlimmsten Fall gewappnet sein und für jedes Feld im Prinzip Platz für neun Ziffern bereitstellen. Interessant sind allerdings vor allem jene Felder, die nur wenige, ja sogar nur einen einzigen Kandidaten haben. In diesem Fall sprechen wir von *eindeutigen Zahlen*. Im gezeigten Beispiel besteht die Menge der Kandidaten für das sechste Feld in der dritten Zeile nur aus der Ziffer 3, denn in der zugehörigen sechsten Spalte kommen die Ziffern 1, 2, 6, 7 und 9, in der zugehörigen Zeile die Ziffern 2, 4 und 5 und im zugehörigen Kasten die Ziffern 2, 6, 8 und 9 vor, was bedeutet, dass nur die 3 unerwähnt bleibt.

Die passive Strategie schafft nun für das Lösen mit Excel eine wichtige Ausgangslage, weil die Kandidaten für jedes Feld leicht bestimmt werden können. Dazu wird zuerst aus jedem Feld des Spiels ein neunfaches Feld gemacht. Am besten ordnet man diese neun Unterfelder wieder quadratisch an, sodass in Excel ein Quadrat von 27 Zeilen und 27 Spalten zur Aufnahme

Bild 2: Der Kandidaten-Bereich.

der Kandidaten vorbereitet wird. Wir nennen diesen neuen Bereich in der Excel-Tabelle den *Kandidaten-Bereich*.

In Bild 2 werden für jedes Feld unseres Beispiels die neun Unterfelder mit den Kandidaten gezeigt. Dabei erscheint jede Ziffer in einem fest zugeordneten Unterfeld: 1 oben links, 2 rechts daneben, dann 3, 4 links in der zweiten Zeile und so weiter bis 9 unten rechts. Falls eine Ziffer nicht Kandidat ist, erscheint im zugehörigen Unterfeld eine Null. So erkennen wir rasch, dass im sechsten Sudoku-Feld der dritten Zeile (7. Zeile, 18. Spalte im Kandidaten-Bereich) nur die 3 als Kandidat steht. Außerdem haben wir im ersten Feld der siebten Sudoku-Zeile (21. Zeile, 2. Spalte im Kandidaten-Bereich) die eindeutige Ziffer 8 als Kandidat. Ebenso ist 3 eindeutige Ziffer im vierten Sudoku-Feld der sechsten Zeile. Damit erkennt man, dass die Termini „eindeutige Zahl“ und „einsame Zahl“ unterschiedliche Dinge bezeichnen.

Wie nun die Excel-Befehle im Einzelnen aussehen, soll hier nur grob dargestellt werden. Am besten gibt man den einzelnen Feldern, Zeilen, Spalten und Kästen des Sudoku-Bereichs Namen, mit denen dann die Kandidaten über folgende Formel berechnet werden:

```
= WENN(ODER(ZÄHLENWENN(Zeile9;5)
+ ZÄHLENWENN(Spalte4;5)
+ ZÄHLENWENN(Kasten8;5) > 0;
Feld94 <> ""); 0; 5)
```

Diese Formel steht im Unterfeld der Ziffer 5 für das vierte Sudoku-Feld der neunten Zeile, also in der 26. Zeile und 11. Spalte des Kandidaten-Bereichs. Sie zählt, wie oft in der neunten Zeile, der vierten Spalte oder dem achten Kasten insgesamt die Ziffer 5 vorkommt. Wenn dieses Vorkommen positiv ist oder das

Sudoku-Feld selbst schon besetzt ist, dann soll eine 0 geschrieben werden, andernfalls eine 5. In unserem Beispiel wird tatsächlich eine 5 geschrieben. Es ist klar, dass diese Formel für jedes Feld des Kandidaten-Bereichs angepasst werden muss, was selbst mit den Instrumenten des Kopierens, Einsetzens und Ersetzens einen erheblichen Aufwand verursacht. Deshalb soll nun ein Ausweg aus dieser Schwierigkeit gezeigt werden, der geometrisch inspiriert ist und für die folgenden Berechnungen zentral sein wird.

Die doppelt-toroidale Ergänzung

Seit man in der Mathematik (3, 3)-Determinanten berechnet – also lange bevor es Excel gab – hat man versucht, eine einfache Merkregel für die Handhabung der neun in einem quadratischen Schema angeordneten Zahlen anzugeben. Diese Regel nenne ich „toroidale Ergänzung“, weil man die gegenüberliegenden Seiten des Quadrats „zusammenklebt“ und es damit zu einem Torus (*vulgo*: Fahrradschlauch) macht. Zur Berechnung der Determinante reicht es allerdings, entweder die horizontalen oder die vertikalen Seiten des Quadrats miteinander zu verbinden. Somit reicht hier die „zylindrische Ergänzung“ (siehe Bild 3).

Diese altehrwürdige Determinanten-Regel feiert nun in Excel neue Triumphe. Sie erlaubt es nämlich, mit einer einzigen Excel-Formel alle Berechnungen in den 81 Feldern einheitlich durchzuführen. Als Beispiel (Bild 4, siehe nächste Seite) nehmen wir uns vor, für jedes Feld eines Sudoku-Bereichs zu berechnen, wie groß die Summe der Ziffern des gegebenen Sudoku-Bereichs in der zugehörigen Zeile (ohne das betreffende Feld selbst) ist. Dazu trennen wir zuerst den gegebenen Sudoku-Bereich längs der Kastengrenzen auf und fügen dort je drei Zeilen bzw. Spalten ein (zwei farbige und eine als Abstandshalter).

Jetzt wird jeder originale, hier dunkel gefärbte Kasten toroidal ergänzt (Bild 4, siehe nächste Seite). Diese Ergänzungen sind etwas heller gefärbt. Dann werden die so ergänzten Kästen nochmals dupliziert, sodass das gesamte Schema aus den 9 erweiterten Kästen seinerseits toroidal ergänzt ist. Diese Ergänzungen sind nochmals heller gefärbt. Eingetragene Buchstaben sollen beispielhaft Felder mit gleichem Inhalt kennzeich-

Bild 3: Berechnung von Determinanten mittels „zylindrischer Ergänzung“.

