Parkette, Symmetrien und islamische Kunst

Beiträge zum Kompetenzerwerb im Strukturieren, Vernetzen und Präsentieren

von Rüdeger Baumann

Die Schönheit fließt aus der Gleichheit;
da Gott die Welt als beste und schönste erschaffen hat,
strebte er in allen Dingen nach Gleichheit.
Johannes Kepler: Weltharmonik

Dem Leben schaudert vor der genauen Richtigkeit.
Thomas Mann: Der Zauberberg

Parkette und Mosaike sind interessante und ästhetisch reizvolle geometrische Gebilde, deren Struktur nicht einfach zu erfassen ist. Ihre computergrafische Erzeugung im Informatikunterricht kann zur Ausbildung von Kompetenzen im Bereich *Strukturieren und Vernetzen* sowie im Bereich *Modellieren und Implementieren* beitragen. Über die Ästhetik der Muster lassen sich Schüler zur Eigenaktivität anregen, deren Ergebnisse in einer Präsentation anderen zur Anschauung gebracht werden können. Der in der Überschrift angesprochene Kontext bietet ein hohes Vernetzungspotenzial und Arbeitsmöglichkeiten quer zur Fachsystematik.

„Schülerinnen und Schüler aller Jahrgangsstufen strukturieren Sachverhalte durch zweckdienliches Zerlegen und Anordnen“, heißt es in den Bildungsstandards Informatik (AKBSI, 2008, S. 50). Die Sachverhalte sind hier in der Lebenswelt der Schüler (Alltag, Architektur, Kunst) auftretende regelmäßige Muster, die analysiert werden müssen, um sie per Programm nachzukonstruieren. „Viele Prozesse lassen sich wegen ihrer Komplexität nur überschauen, indem man sie bewusst in Teilprozesse gliedert und deren Struktur analysiert“ (AKBSI, 2008, S. 51). Genau dies ist bei den im Folgenden zu entwerfenden Programmen erforderlich; dabei orientiert sich die Programmstruktur an der geometrischen Struktur (des Mosaiks oder Parketts) und wird damit besonders leicht überschaubar. „Verbindungen zwischen unterschiedlichen Sachverhalten erzeugen Vernetzungen (Begriffsnetz) und fördern das Verständnis informatischer Inhalte in ihrer Gesamtheit und ihrer Bedeutung in Anwendungen, anderen Fächern und Lebensbereichen“ (AKBSI, 2008, S. 50). An anderen Fächern und Lebensbereichen sind – neben Mathematik – Kunst und Architektur sowie Physik (Kristallografie) und Biologie (Selbstähnlichkeit) beteiligt.

Klassische Parkette

Die folgenden Beispiele handeln von geometrischen Gebilden, die üblicherweise als *Flächenaufteilungen*, *Pflasterungen* oder *Parkette* bezeichnet werden. Sie sind im Alltag (auf Tapeten, Stoffen, Fliesenböden, Gehwegen usw., siehe Bild 1) vielfach anzutreffen. Eine *Parkettierung* (engl.: *tiling*, von tile = Fliese; franz.: *pavage*, von pavé = Pflasterstein) ist eine lückenlose, überlappungsfreie Bedeckung der Ebene mit bestimmten Figuren, den *Parkettsteinen* oder *Fliesen*.

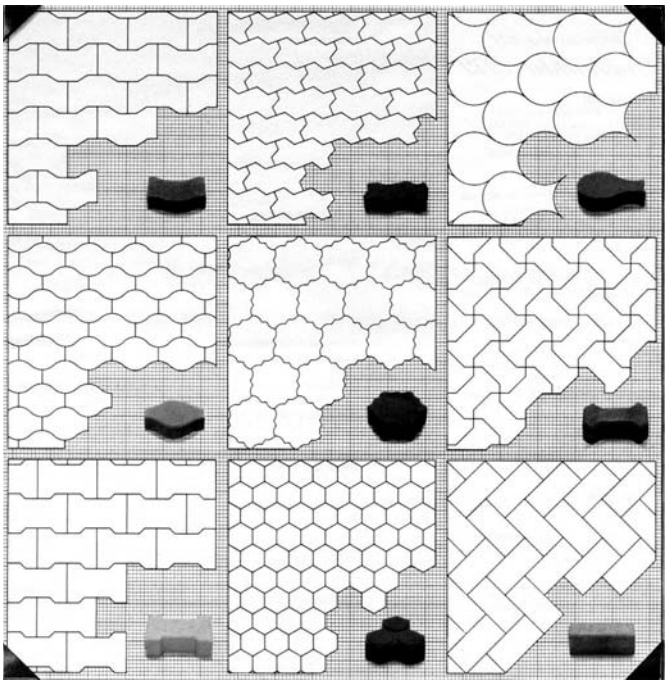

Bild 1: Werbung für Pflastersteine (Ausschnitt).

Bild 2: Alhambra.

Parkette im täglichen Leben, in Architektur und Kunst

Reimann (1977, S. 158) führt zu diesem Thema aus:

Die Geschichte der Parkettierung ist fast ebenso alt wie die des Bauwesens. Die Fußböden von Gebäuden wurden seit alters mit Steinstücken ausgelegt. Anfangs legte man dazu aufs Geratewohl flache Steine aneinander; später wurden diese bearbeitet, damit beim Zusammenfügen weniger Lücken auftraten. Dann entdeckte man, dass es noch besser geht, wenn man gleichförmige Abdecksteine gleicher Gestalt und Größe verwendet – insbesondere dann, wenn diese aus Ton gebrannt waren.

Die Ägypter legten Steinfliesen zu regelmäßigen Mustern; auch die alten Römer und Griechen verwendeten für ihre Mosaike häufig regelmäßige Muster (Coxeter, 1963, S. 82):

Die Kunst der Überdeckung (oder Pflasterung) der Ebene mit wiederholten Mustern erreichte ihren Höhepunkt im Spanien des dreizehnten Jahrhunderts, wo die Mauren alle siebzehn Symmetriegruppen auf den Schmuckflächen der Alhambra [Bild 2] verwendeten. Sie bevorzugten die abstrakten Muster, weil sie das zweite Gebot streng einhielten, nach dem man sich kein Bild oder Gleichnis von irgendeinem Ding oder Lebewesen machen darf.

Beispiel 1: Das Dalí-Parkett

Von Salvador Dalí stammt ein bemerkenswertes Bild mit dem Titel *Fünfzig abstrakte Bilder, die sich – aus einer Entfernung von knapp zwei Metern betrachtet – in einen dreifachen, als Chinesen verkleideten Lenin verwandeln, und bei einem Abstand von sechs Metern als Kopf eines Königstigers erscheinen*, an dem sich eine gewisse Parkettierung erkennen lässt. Sie soll analysiert und nachgezeichnet werden (Bild 3).

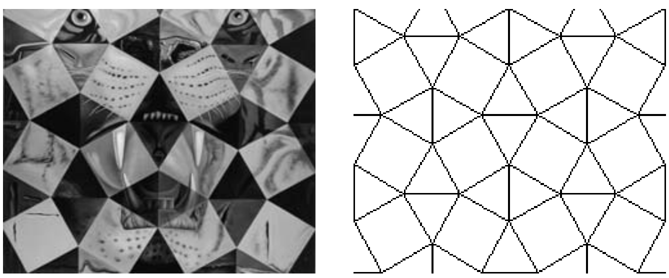

Bild 3: Cinquenta imágenes abstractas … (Dalí, 1963).

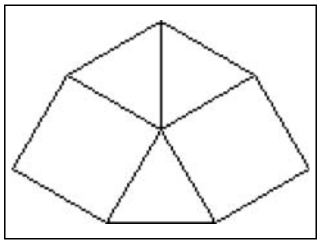

Bild 4: Eckfigur des Dalí-Parketts, Typ (3, 4, 3, 4, 3).

Um die geometrische Struktur des Bildes zu erfassen, lassen wir Chinesen, Lenin und Tiger beiseite und achten nur noch auf Dreiecke und Quadrate. Unsere Analyse könnte beispielsweise darin bestehen, dass wir uns einen Eckpunkt herausgreifen und feststellen, wie die (gleichseitigen) Dreiecke und Quadrate um diesen Punkt, wir nennen ihn *Knotenpunkt*, herum angeordnet sind. Die Schreibweise (3, 4, 3, 4, 3) deutet an, dass die Reihenfolge „Dreieck, Viereck, Dreieck, Viereck, Dreieck“ lautet (siehe Bild 4).

Die folgende JAVA-Prozedur bildet diese Eckfigur genau nach: Es wird zunächst ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet, nach der Drehung um 60° nach links kommt das Quadrat usw. Dabei sind vor() und drehe() Anweisungen der Schildkrötengrafik; der vorangestellte Buchstabe s bezeichnet ein Objekt (eben die Zeichenschildkröte), das die genannten Anweisungen versteht und ausführt.

```
void zeichneDreieck (double a) {
  for (int i = 0; i < 3; i++)
    {s.vor(a); s.drehe(120);}
  } // Ende zeichneDreieck

void zeichneEckfigur (double a) {
  zeichneDreieck(a); s.drehe(60);
  zeichneQuadrat(a); s.drehe(90);
  zeichneDreieck(a); s.drehe(60);
  zeichneQuadrat(a); s.drehe(90);
  zeichneDreieck(a); s.drehe(60);
  } // Ende zeichneEckfigur
```

Zur Erzeugung des Parketts muss diese Eckfigur in zwei Richtungen verschoben werden. Um die Richtungsvektoren zu gewinnen, verbinden wir (in Bild 3, rechts) die Knotenpunkte benachbarter Eckfiguren

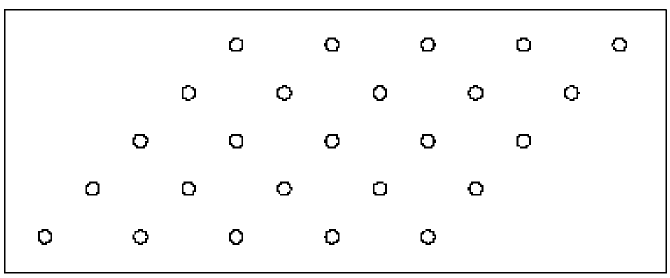

Bild 5: Gitter der Knotenpunkte des Dalí-Parketts.

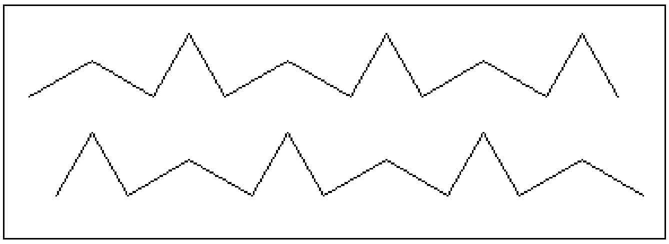

Bild 6:
„Zackenlinien“ zur Erzeugung des Dalí-Parketts.

miteinander und erhalten ein Gitter aus Quadraten, deren Seiten um 45° gegen die Waagerechte geneigt sind (Bild 5, vorige Seite).

Aufgabe 1.1: Berechnen Sie (a) die Länge x der Diagonale, (b) die Seitenlänge y der Gitterquadrate von Bild 5 und verwenden Sie x, y als Länge der Verschiebungsstrecken in waagerechter bzw. schräger Richtung.

Das Parkett wird mittels zweier geschachtelter Zählschleifen erstellt, wobei die innere Schleife einen „Streifen“ aus n nebeneinanderliegenden Eckfiguren zeichnet (Verschiebung x), und die äußere Schleife m solcher Streifen schräg übereinanderstapelt (Verschiebung y).

```
double x = 1 + Math.sqrt(3);       // 2.732
double y = x * Math.sqrt(2) * 0.5; // 1.932

void zeichneParkett (double a, int m, int n) {
  for (int i = 0; i < m; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++) {
      zeichneEckfigur(a);
      s.drehe(-90); s.springeVor(x * a);
                    s.drehe(90);
      } // Ende for
    s.drehe(-90); s.springeZurück(x * a * n);
                  s.drehe(90);
    s.drehe(-45); s.springeVor(y * a);
                  s.drehe(45);
    } // Ende for
  s.drehe(-45); s.springeZurück(z * a * m);
                s.drehe(45);
  } // Ende zeichneParkett
```

Aufgabe 1.2: Das Programm lässt leider gewisse Lücken, die allerdings auf den ersten Blick nicht auffallen. Ergänzen Sie die Eckfigur (Bild 4) so, dass sie sich (als Fliese) zur lückenlosen Überdeckung eignet.

Aufgabe 1.3: Statt Richtung und Länge der Verschiebungsvektoren zu berechnen, hätte man auch auf den Parkettfugen (Fliesenrändern) von einem Knotenpunkt zum anderen gelangen können. Realisieren Sie diese Möglichkeit!

Aufgabe 1.4: Statt die Eckfigur von Bild 4 zu verschieben, hätte man zur Erzeugung des Dalí-Parketts auch zwei – gegeneinander versetzte – „Zackenlinien“ verwenden können (Bild 6). Programmieren Sie diese Möglichkeit und beurteilen Sie beide Vorgehensweisen hinsichtlich Verständlichkeit und Effizienz.

Parkette und Weltharmonik

In seinem Hauptwerk *Weltharmonik* (Harmonices mundi, 1619) versucht Johannes Kepler (Bild 7) eine „Sinndeutung der äußeren Welt. Die Tatsachen und Gesetze der Natur sind nur Bausteine für eine höhere Weltanschauung. […] Grund und Wurzel aller Ordnung im Weltbau liegt für Kepler in der Geometrie“ (Caspar, 1939, S. 11). Kepler ist der Erste, der den Parketten eine mathematische Untersuchung widmet (Bild 8). Im zweiten Buch des genannten Werkes behandelt er das „Zusammenfügen geometrischer Figuren“ und schreibt (Kepler, 1619, S. 63):

> Da wir uns vorgenommen haben, den Ursprung der Harmonik und ihre so herrlichen Auswirkungen in der ganzen Welt aufzuzeigen, wie könnten wir da das Zusammenfügen der Figuren, die doch die Quellen der harmonischen Proportionen sind, unerörtert lassen?

Wird nur eine einzige Sorte regelmäßiger Vielecke als Fliese verwendet, heißt ein Parkett *regulär* (engl.: *regular tiling*, franz.: *pavage régulier*).

Beispiel 2: Bienenwabe

Die Ebene soll (wie eine Bienenwabe, siehe Bild 8, nächste Seite, Fall F) mit regelmäßigen Sechsecken gepflastert werden.

Wir könnten wie in Beispiel 1 vorgehen, indem wir ein Motiv (einzelnes Sechseck oder Eckfigur aus drei Sechsecken) in zwei Richtungen verschieben. Eine andere Möglichkeit besteht darin, das Parkett als ein Verzweigungsmuster (Baumstruktur) aufzufassen und rekursiv zu erzeugen (Bild 9, nächste Seite). Grundfigur ist ein „Dreifuß“ aus Strecken im Winkel von je 120°:

```
void zeichneDreifuß (double a) {
  for (int i = 0; i < 3; i++)
    {s.vor(a); springeZurück(a); s.drehe(120);}
  } // Ende zeichneDreifuß
```

Bild 7:
Johannes Kepler (1571–1630) untersuchte als Erster regelmäßige Flächenaufteilungen.

Quelle: LOG-IN-Archiv